ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ
по образовательным программам среднего общего образования в 2018 году

Математика

Вариант № 15

Ответы
I часть

№ 1. **Ответ:** 350 см.

Решение: НОК(70;50) = $2\cdot5\cdot5\cdot7=350$

$$\begin{array}{r||l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r||l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

№ 2. **Ответ:** 0,04.

Решение: $0{,}2^{12}:0{,}2^{10}=0{,}2^{2}=0{,}04$.

№ 3. **Ответ:** – 1.

Решение: $tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)tg(\pi+\alpha)=-ctg\,\alpha\cdot tg\,\alpha=-1$.

№ 4. **Ответ:** 4.

Решение: $\log_{\sqrt{3}}9=\log_3 81=4$.

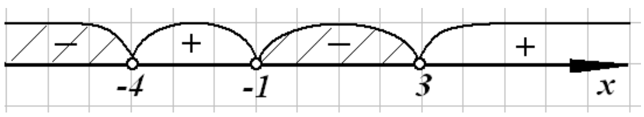
№ 5. **Ответ:** $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$.

Решение: $\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0$; $4x-\frac{\pi}{4}=\pi n$, $n\in Z$; $4x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$;

$x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$.

№ 6. **Ответ:** $x\in(-\infty;-4)\cup(-1;3)$.

Решение: применяем метод интервалов.



№ 7. **Ответ:** – 1.

Решение: $\log_{31}(2+x)=0$; $2+x=31^0$; $2+x=1$; $x=-1$.

№ 8. **Ответ:** $E(y)=(-3;+\infty)$; ИЛИ $y\in(-3;+\infty)$; ИЛИ $(-3;+\infty)$.

Решение: так как $4^x>0$, то $4^x-3>-3$. Значит, $E(y)=(-3;+\infty)$.

№ 9. **Ответ:** 2.

Решение: $y'=\frac{1}{2x+1}\cdot2=\frac{2}{2x+1}$; $k=y'(0)=\frac{2}{2\cdot0+1}=2$.

№ 10. **Ответ:** $\overrightarrow{AC_1}$.

Решение: по правилу параллелепипеда $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}$.

№ 11. **Ответ:** $4\sqrt{3}$ дм^2.

Решение: $V=\frac{1}{3}S_{осн}H$, $S_{îñí}=\frac{3V}{H}=\frac{3\cdot24}{6\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$ (дм^2).

№ 12. **Ответ:** 2 месяца.

Решение; с начала февраля по конец мая температура ниже 5° была в феврале и марте, то есть 2 месяца.

II часть

№ 13. **Решение:** $\frac{\sin 3\alpha + \sin\alpha - 2\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha + \cos\alpha - 2\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\frac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha-\alpha}{2} - 2\sin 2\alpha}{2\cos\frac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha-\alpha}{2} - 2\cos 2\alpha} =$

$= \frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha - 2\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha - 2\cos 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha(\cos\alpha - 1)}{2\cos 2\alpha(\cos\alpha - 1)} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = tg\,2\alpha$.

Ответ: $tg\,2\alpha$.

№ 14. **Решение:** $4^x - 12\cdot 2^x + 32 = 0$.

Пусть $2^x = t$, тогда $t > 0$ и $4^x = t^2$. Получаем приведенное квадратное уравнение $t^2 - 12t + 32 = 0$. По обратной теореме Виета находим корни $t_1 = 4$ и $t_2 = 8$.

1) $2^x = 4$; $2^x = 2^2$; $x = 2$.

2) $2^x = 8$; $2^x = 2^3$; $x = 3$.

Ответ: 2; 3.

№ 15. **Решение:** $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $[1;3]$.

$D(f) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$.

Найдем критические точки. $f'(x)$ существует на всей $D(f)$ и $f'(x) = 0$ если $1 - \frac{4}{x^2} = 0$; $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4$; $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$.

Отрезку $[1;3]$ принадлежит критическая точка $x_2 = 2$.

$f(1) = 1 + \frac{4}{1} = 5$; $f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$; $f(3) = 3 + \frac{4}{3} = 3 + 1\frac{1}{3} = 4\frac{1}{3}$.

Так как $4 < 4\frac{1}{3} < 5$, то наибольшее значение функции равно 5.

Ответ: 5.

№ 16. **Решение:** Пусть a – сторона квадрата (правильного четырехугольника), R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанного круга. Так как длина большей окружности 16π см, то $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{16\pi}{2\pi} = 8$ (см).

Тогда $a = R\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ см, $r = \frac{a}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ (см).

Площадь меньшего круга $S = \pi r^2 = \pi\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32\pi$ (см^2).

Ответ: $8\sqrt{2}$ см, 32π см^2.

№ 17. **Решение:** $y = \sqrt{\cos x - 1}$.

$D(f)$: $\cos x - 1 \ge 0$; $\cos x \ge 1$. Так как $-1 \le \cos x \le 1$, то $\cos x = 1$.

$x = 2\pi n$, $n \in Z$.

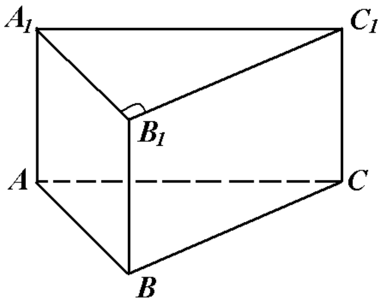
Ответ: $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

№ 18. Решение:

$ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма. Ее основания $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ – прямоугольные треугольники, $\angle B = 90°$, $AB = 5$ см, $AC = 13$ см.

Из ΔABC $(\angle B = 90°)$:

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см),



$P_{осн} = AB + BC + AC = 5 + 12 + 13 = 30$ (см).

Высота призмы по условию равна радиусу вписанной в основание окружности, тогда

$H = r = \dfrac{AB + BC - AC}{2} = \dfrac{12 + 5 - 13}{2} = 2$ (см).

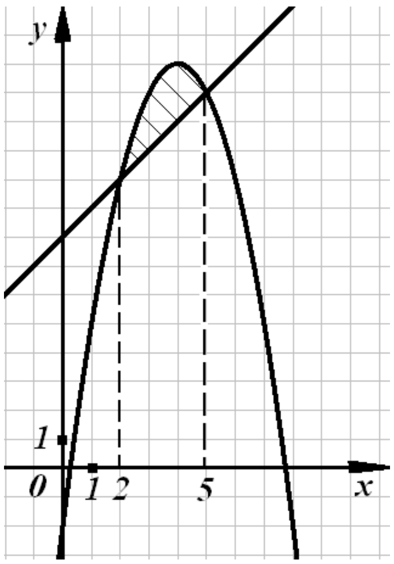
Тогда площадь боковой поверхности призмы

$S_{бок} = P_{осн}H = 30 \cdot 2 = 60$ (см^2).

Ответ: 60 см^2.

№ 19. Решение:

Построим графики данных функций $y = 8x - x^2 - 2$ и $y = x + 8$.



$y = 8x - x^2 - 2$.

Это квадратичная функция, ее графиком является парабола, ветви которой направлены вниз, так как $a = -1$ и $-1 < 0$.

Вершина параболы: $(4;14)$, так как

$x_в = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{8}{2 \cdot (-1)} = 4$, $\quad y_в = y(4) = 8 \cdot 4 - 4^2 - 2 = 14$.

Точки пересечения с осью абсцисс: $\left(4 - \sqrt{14};0\right)$ и $\left(4 + \sqrt{14};0\right)$.

$8x - x^2 - 2 = 0$; $\; x^2 - 8x + 2 = 0$;

$D = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 56$, $\sqrt{D} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$;

$x_1 = \dfrac{8 - 2\sqrt{14}}{2 \cdot 1} = 4 - \sqrt{14}$ и $x_2 = \dfrac{8 + 2\sqrt{14}}{2 \cdot 1} = 4 + \sqrt{14}$.

$y = x + 8$.

Это линейная функция. Ее графиком является прямая, проходящая через точки $(0;8)$ и $(-8;0)$.

Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций, решив уравнение:

$x + 8 = 8x - x^2 - 2$; $\; x^2 - 7x + 10 = 0$; $\; x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

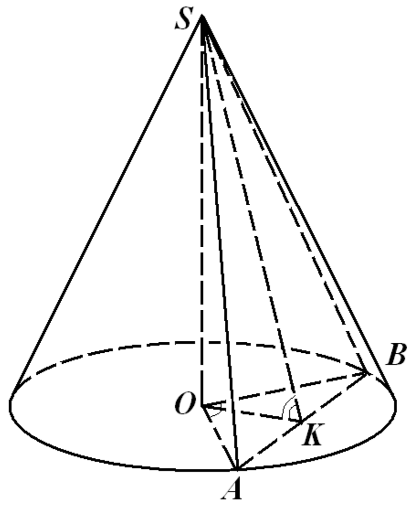
Из рисунка видно, что искомая площадь сверху ограничена дугой параболы $y = 8x - x^2 - 2$, а снизу – отрезком прямой $y = x + 8$. Поэтому искомую площадь можно найти по формуле: $S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$, где $f_2(x)$ и $f_1(x)$ – непрерывны и $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a;b]$.

$$S = \int_2^5 \left(8x - x^2 - 2 - (x + 8)\right)dx = \int_2^5 \left(-10 + 7x - x^2\right)dx = \left(-10x + \frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^5 =$$

$$= \left(-50 + \frac{175}{2} - \frac{125}{3}\right) - \left(-20 + 14 - \frac{8}{3}\right) = -50 + 87\frac{1}{2} - 41\frac{2}{3} + 6 + 2\frac{2}{3} = 43\frac{1}{2} - 39 = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

№ 20. Решение:



SO – ось конуса, где S – вершина конуса, O – центр основания. Плоскость сечения проходит через вершину конуса, точку S, и пересекает основание конуса по хорде AB, а боковую поверхность – по образующим $SA = SB$. Хорда AB видна из центра основания конуса, точки O, под углом $60°$, тогда $\angle AOB = 60°$. В плоскости основания проведем $OK \perp AB$, тогда $OK = 6$см, как расстояние от точки O до хорды. Так как $SO \perp AOB$, то OK – проекция SK на плоскость основания и по теореме о трех перпендикулярах так как $OK \perp AB$, то и $SK \perp AB$. OK лежит в плоскости основания конуса, SK – в плоскости сечения, эти плоскости пересекаются по прямой AB, тогда $\angle SKO = 45°$ как линейный угол двугранного угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Найдем объем конуса по формуле $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где R – радиус основания, $R = AO$; H – высота конуса, $H = SO$.

Так как $AO = BO$ как радиусы, то ΔAOB – равнобедренный с основанием AB и OK – его высота проведенная к основанию, тогда OK является медианой и биссектрисой этого треугольника и значит, $AK = KB = \frac{1}{2}AB$, $\angle AOK = \angle BOK = \frac{1}{2}\angle AOB = 30°$.

Из ΔAOK $(\angle AKO = 90°)$:

$$OA = \frac{OK}{\cos\angle AOK} = \frac{6}{\cos 30°} = 6 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}\text{ (см).}$$

Из ΔSOK $(\angle SOK = 90°)$:

$$SO = OK \cdot tg\angle SKO = 6 \cdot tg 45° = 6 \cdot 1 = 6\text{(см).}$$

Итак $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot 6 = 2\pi \cdot 16 \cdot 3 = 96\pi$ (см^3).

Ответ: 96π см^3.